数理解析研究所講究録
22巻 1967年 88-103

Friedrichs-Berezin の理論とBCS reduced Hamiltonian のスペクトル

神戸大学理学部　麦 林 布 道
教育学部　加 藤 裕 輔

§1. まえがき

昨年3月のこの研究会（数理解析研究所講究録15）において，書名のみを掲げ，その内容に触れることが出来なかつた

(1) F. A. Berezin: The method of second quantization, Nauka Moscow, 1965（ロシヤ語）；英訳 Academic Press, 1966 Dec.

の一部を紹介し，その一寸した，しかし重要な拡張を考えて，BCS 理論への応用を試みる.

第二量子化の operator で書かれた Hamiltonian (self-adjoint operator）のスペクトルをしらべることは，物理的に面白い個々の例についてはしばしば議論されているが，到底数学的に満足のいくものとは思えず，十分つつこんだ系統的な研究は甚だ稀である.[2)]

Berezin は上の本で，相互作用の部分が第二量子化の operator について，一次及び二次の Hamiltonian を canonical transformation によつて対角化する問題を論じている．この報告ではいわゆる quadratic Hamiltonian の対角化について，Berezin の理論を紹介するとともにその Friedrichs の理論[2)]との関係について述べる．彼らの理論は，第二量子化の Hilbert 空間でスペクトルを求める問題を，一体問題の Hilbert 空間でのそれに完全にひき直した点で興味がある．反面，彼らの理論には，いろいろの強い条件がついているので，実際問題になかなか当てはまらない，そこで，ここでは，その一つの重要な拡張を試み，BCS 理論

の reduced Hamiltonian のスペクトルを求めるのに使う.

§2. Berezin の理論

CCR を満たす operator の場合のみを詳しく紹介する. ACR の場合も略. 平行に議論できるので, 付録に結果だけを述べて, 我々の解釈をつけるにとどめる.

L を involutory Hilbert space, Φ, Ψ,⋯, A, B,⋯ をその上に作用する integral operator とし, unit operator を簡単に 1 で表わす.

CCR $\quad [a,a^*] = 1 \;,\quad [a,a] = [a^*,a^*] = 0$

を不変にする斉一次変換

$$\begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ b^* \end{pmatrix}$$

の群を考える. $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$ は canonical transformation の matrix とよばれ

$$\mathcal{A} I \mathcal{A}' = I \quad 及び \quad \mathcal{A}' I \mathcal{A} = I \;, \qquad 但し\; I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

を満たす. 特に, 第二量子化の Hilbert space における unitary operator U が存在して, $a = UbU^{-1}$, $a^* = Ub^*U^{-1}$ と書ける時, その canonical transformation を proper であるという.

<u>Lemma 2.1.</u> $\mathcal{A}$ が proper canonical transformation の matrix であるための必要十分条件は $\Psi \in \mathcal{S}$ (Schmidt operator).

$$G = \{\mathcal{A} \;;\; \Psi \in \mathcal{S}\}$$
$$G_0 = \{\mathcal{A} \;;\; \Psi = 0\} \subset G \;.$$

$\mathcal{A}$ の real correspondenceを考えると便利である:

$$\mathcal{B} = U\mathcal{A}U^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad 但し\ U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

$$A = \mathrm{Re}(\Phi+\Psi),\ B = -\mathrm{Im}(\Phi-\Psi)$$

$$C = \mathrm{Im}(\Phi+\Psi),\ D = \mathrm{Re}(\Phi-\Psi)$$

$\mathcal{B}$それ自身は一般に canonical transformation の matrix ではないが，$\mathcal{A}$の条件から

$$\mathcal{B}I\mathcal{B}' = I \text{ 及び } \mathcal{B}'I\mathcal{B} = I \tag{2.2}$$

を満たす。また

$$\mathcal{A} \in G \rightleftharpoons \mathcal{B} \in F = \{\ \mathcal{B}\ ;\ A-D,\ B+C \in \mathbf{S}\ \}$$
$$\mathcal{A} \in G_0 \rightleftharpoons \mathcal{B} \in F_0 = \{\ \mathcal{B}\ ;\ A = D,\ B = -C\ \}$$

<u>Lemma 2.2</u>

i) A, C は L の operatorで，$A = A' \in \mathbf{B}$, $C = C^*$

ii) $F(t) \equiv \int_0^t e^{-iC\tau}Ae^{-i\bar{C}\tau}d\tau \in \mathbf{S}$

iii) $[\mathrm{Sp}\ F(t)F^*(t)]^{\frac{1}{2}}$ は locally summable

$$\Longrightarrow \qquad \exp\left[it\begin{pmatrix} -C & -A \\ \bar{A} & \bar{C} \end{pmatrix}\right] \in G$$

<u>Theorem 2.1.</u>

$$H = \frac{1}{2}(a\ \ a^*)\begin{pmatrix} T & \bar{S} \\ S & \bar{T} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix}$$

は normal form ($T \in \mathbf{S}$), かつ self-adjoint ($T' = T$, $S^* = S$) であるとする．

i) $\bar{T} = T$, $\bar{S} = S$ ii) $S \in \mathbf{B}$

iii) $S \pm T \geq \mu > 0$ (μ は positive const)

$$^{\exists}\mathcal{A} \in G, \quad \begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix} = \mathcal{A}\begin{pmatrix} b \\ b^* \end{pmatrix} \quad \text{のとき}$$

$$H = b^* \Omega b + k$$

となる．ここに $\Omega^* = \Omega$ で，k は const.

（証明）

$$H = \frac{1}{2}(a \ a^*)\begin{pmatrix} \bar{T} & \bar{S} \\ S & T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(b \ b^*)\mathcal{A}'\begin{pmatrix} \bar{T} & \bar{S} \\ S & T \end{pmatrix}\mathcal{A}\begin{pmatrix} b \\ b^* \end{pmatrix}$$

即ち，$\begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix} \rightarrow \mathcal{A}^{-1}\begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix}$ のとき，$\begin{pmatrix} \bar{T} & \bar{S} \\ S & T \end{pmatrix} \rightarrow \mathcal{A}'\begin{pmatrix} \bar{T} & \bar{S} \\ S & T \end{pmatrix}\mathcal{A}$, 従つて

$$\begin{pmatrix} -S & -T \\ \bar{T} & \bar{S} \end{pmatrix} \rightarrow \mathcal{A}^{-1}\begin{pmatrix} -S & -T \\ \bar{T} & \bar{S} \end{pmatrix}\mathcal{A}.$$

ところが，Lemma 2.1. によつて

$$V(t) \equiv \exp\left[it\begin{pmatrix} -S & -T \\ \bar{T} & \bar{S} \end{pmatrix}\right] \in G$$

故に，$\sigma V(t)\sigma^{-1} \in G_0$ なる $\sigma \in G$ の存在することをいえばよい．同じことを，real correspondence $\tau = U\sigma U^{-1}$, $W(t) = UV(t)U^{-1}$ についていえば，$\tau W(t)\tau^{-1} \in F_0$ なる $\tau \in F$ の存在を示せばよい．

$$W(t) = \exp\left[t\begin{pmatrix} \alpha & +\beta \\ -\gamma & \delta \end{pmatrix}\right]$$

$$\alpha = \mathrm{Im}\,(S + T), \quad \beta = \mathrm{Re}(S - T)$$

$$\gamma = \mathrm{Re}\,(S + T), \quad \delta = \mathrm{Im}\,(S - T)$$

L 上の symmetric operator の set

$$\tilde{\mathcal{Z}} = \{Z \ ; \ Z' = Z, \ \mathrm{Im}\, Z > 0\}$$

及び $\mathcal{Z} = \{Z \ ; \ Z \in \tilde{\mathcal{Z}}, \ Z - i \in \mathbf{S}\}$

を考える．今，$\tilde{\mathcal{Z}}$ に対する $\mathcal{B}$ の operation を

$$\mathcal{B} Z \equiv (AZ+B)(CZ+D)^{-1}, \qquad Z \in \widetilde{\mathbb{Z}}$$

で定義すると，次のことがいえる．

$$\mathcal{B} \in F_0 \rightleftharpoons \mathcal{B} Z_0 = Z_0 \qquad \text{但し} Z_0 = i \in \mathbb{Z}$$

$$Z \in \widetilde{\mathbb{Z}}, \ \mathcal{B} \in F \Rightarrow \mathcal{B} Z \in \widetilde{\mathbb{Z}}.$$

次に，$\widetilde{\mathbb{Z}}$ の点で，$W(t)$ に関する不動点を求める．$Z(t) = W(t)Z$ $(Z \in \widetilde{\mathbb{Z}})$ とおいて，$dZ(t)/dt = 0$ から不動点の満たす方程式を導くと，

$$Z\gamma Z + \beta = 0 \tag{2.3}$$

をうる．但し，$\overline{S} = S$, $\overline{T} = T$ より $\alpha = \delta = 0$ となることを使った．尚，同じ条件から，$\beta, \gamma \geq \mu > 0$ である。この方程式の $\widetilde{\mathbb{Z}}$ に属する解は

$$Z_1 = i\gamma^{-\frac{1}{2}}(\gamma^{\frac{1}{2}}\beta\gamma^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\gamma^{-\frac{1}{2}}$$

である。更に，$Z_1 \in \mathbb{Z}$ が示せる（この証明には，$\beta, \gamma \geq \mu$ 及び $T \in \mathbf{S}$ が使われている）。

一般に，$\mathbb{Z} \ni Z = X + iY$ を $Z_0 = i$ に移す変換 $\tau = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in F$ は簡単に計算できて

$$A = Y^{-\frac{1}{2}}, \quad D = Y^{\frac{1}{2}}, \quad B = -Y^{-\frac{1}{2}}X, \quad C = 0$$

（今の場合，$X = 0$ 従って $B = 0$ ）．この τを使えば $\tau W(t)\tau^{-1} \in F_0$ は明らか．故に求むる $\mathcal{A} \in G$ は

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}' = U^{-1}\tau^{-1}U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} Y^{\frac{1}{2}} + Y^{-\frac{1}{2}} & Y^{\frac{1}{2}} - Y^{-\frac{1}{2}} \\ Y^{\frac{1}{2}} - Y^{-\frac{1}{2}} & Y^{\frac{1}{2}} + Y^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

となり，

$$\mathcal{A}'\begin{pmatrix} T & S \\ S & T \end{pmatrix}\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & Y^{-\frac{1}{2}}\beta Y^{-\frac{1}{2}} \\ Y^{-\frac{1}{2}}\beta Y^{-\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

即ち, $\Omega = Y^{-\frac{1}{2}}\beta Y^{-\frac{1}{2}}\ (= Y^{\frac{1}{2}}\gamma Y^{\frac{1}{2}})$, $k = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\ \Omega$.

§3. Friedrichs の理論との関係

先づ，前節における Berezin の証明の簡素化を行う．問題のproper canonical transformation を $\mathcal{A} = U^{-1}\mathcal{B}U$と書いて，対角化の条件と，$\mathcal{B} \in F$ という条件から$\mathcal{B}$の形をきめる．

$$\begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix} = U^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{B}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B}$として

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}, \qquad A,\ D \ \text{real} \qquad (3.1)$$

の形を仮定（ §2 の τ^{-1} に対応） すると

$$H = \frac{1}{2}(xy)\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(uv)\begin{pmatrix} A'^{-1}\gamma A^{-1} & 0 \\ 0 & D'^{-1}\beta D^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

となる．但し S, T realを始めから使つた．

$A'^{-1}\gamma A^{-1} = D'^{-1}\beta D^{-1}\ (= \Omega)$ となる様に A,D を選ぶ（対角化の条件）と，$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = U\begin{pmatrix} b \\ b^* \end{pmatrix}$ により

$$H = \frac{1}{2}(b\ b^*)\begin{pmatrix} 0 & \Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ b^* \end{pmatrix} = b^*\Omega b + \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\ \Omega$$

条件 $\mathcal{B} \in F_0$ から

$$AD' = DA' = A'D = D'A = 1 \ \text{かつ}\ A^{-1}\text{-}D^{-1} \in \mathcal{S} \qquad (3.2)$$

従つて, $Y = A^{-1}D\ (= Y')$ とおいて, $Y\gamma Y = \beta$ [(2.3) と同じ] を

とくことにより，対角化の条件は

$$A^{-1}D = \gamma^{-\frac{1}{2}}(\gamma^{\frac{1}{2}}\beta\gamma^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\gamma^{-\frac{1}{2}} \tag{3.3}$$

に置きかえられる．結局我々の問題は (3.2) と (3.3) の解 A,D を求めることに帰着された．次の２組の解を与える．

a) $A^{-1} = D = Y^{\frac{1}{2}}$ 　但し $Y = \gamma^{-\frac{1}{2}}(\gamma^{\frac{1}{2}}\beta\gamma^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\gamma^{-\frac{1}{2}}$,

$$\therefore\quad \Omega = Y^{\frac{1}{2}}\gamma Y^{\frac{1}{2}}$$ (Berezin の解)

b) $A = \omega^{-\frac{1}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}}$, $D = \omega^{\frac{1}{2}}\gamma^{-\frac{1}{2}}$, 但し $\omega = (\gamma^{\frac{1}{2}}\beta\gamma^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$, $\therefore \Omega = \omega$

(Friedrichsの解)

° Berezin が直接確かめたように，$Y - 1 \in \mathcal{S}$ であるから，
$A^{-1}-D^{-1} = (Y-1)D^{-1} \in \mathcal{S}$ は明らか．

∘ a) と b) はＬでの直交変換，即ち G_0 に属する変換によつて互に移ることが示せるので，両者のスペクトルは一致する．

∘ b) については

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1\mathcal{B}_2 \qquad \text{但し } \mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} \gamma^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \gamma^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_2 = \begin{pmatrix} \omega^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \omega^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

と書ける，$\mathcal{B}_1$，$\mathcal{B}_2$ は共に条件 (2.2) を満たしている．

∘ $$\mathcal{A} = U^{-1}\mathcal{B}U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A^{-1}+D^{-1} & A^{-1}-D^{-1} \\ A^{-1}-D^{-1} & A^{-1}+D^{-1} \end{pmatrix}.$$

§4. β が０に点スペクトルをもつ場合

仮定：　$\gamma \geq \gamma_m > 0$. $\beta \geq 0$ でβは0に multiplicity n ($<\infty$) の点スペクトルをもち，βの他のスペクトルは0から離れている．

この仮定から直ちに，$\omega = (\gamma^{\frac{1}{2}}\beta\gamma^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$ も0に多量度n の点スペクトルをもち，ω の他のスペクトルは0から離れて正であることがいえる．ω の固有値 0の固有空間への projection operator を P_0 また $P_1 = 1-P_0$ と書く．

<u>Lemma 4.1.</u>　変換$\begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix} = U^{-1}\mathcal{B}_1\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ により

$$H = \frac{1}{2}(aa^*)\begin{pmatrix} T & S \\ S & T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\xi\eta)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(\xi_1\eta_1)\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(\xi_0\eta_0)\begin{pmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}$$

但し　$\begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{pmatrix} = \mathcal{P}_i\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$,　$\mathcal{P}_i \equiv \begin{pmatrix} P_i & 0 \\ 0 & P_i \end{pmatrix}$,　$i = 0,1$

さらに　P_1L で $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} = \mathcal{B}_2U\begin{pmatrix} b_1 \\ b_1^* \end{pmatrix}$　{ 註 $[\mathcal{B}_2, \mathcal{P}_i] = 0$}

P_0L で $\begin{pmatrix} p_m \\ q_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int\xi_0 f_m dx \\ \int\eta_0 f_m dx \end{pmatrix}$,　f_m は P_0L の basis

と変換すると

$$H = b_1^*\omega b_1 + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} p_m^2 + \text{const} \tag{4.1}$$

となる．$[b_1,p_m] = [b_1^*,p_m] = 0$ であるから (4.1)は $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_0$ と分解されて，$H = H_1 \otimes I_0 + I_1 \otimes H_0$. となることを示している．

上の変換をまとめると

$$\begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix} = U^{-1}\mathcal{B}_1\mathcal{P}_1\mathcal{B}_2 U\begin{pmatrix} b_1 \\ b_1^* \end{pmatrix} + U^{-1}\mathcal{B}_1\mathcal{P}_0\begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} \qquad (4.2)$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_1^* \end{pmatrix} = U^{-1}\mathcal{B}_2^{-1}\mathcal{P}_1\mathcal{B}_1^{-1}U\begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix} \qquad (4.3)$$

$$\begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} = \mathcal{P}_0\mathcal{B}_1^{-1}U\begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix} \qquad (4.4)$$

定義： ω の 0 以外のスペクトルの下端を μ (> 0)とする.

$$\omega_\rho \equiv \omega + \rho\mu P_0 \qquad (0 < \rho \leq 1)$$

$$\beta_\rho \equiv \gamma^{-\frac{1}{2}}\omega_\rho^2\gamma^{-\frac{1}{2}} = \beta + \rho^2\mu^2\gamma^{-\frac{1}{2}}P_0\gamma^{-\frac{1}{2}}$$

$$S_\rho \equiv \frac{1}{2}(\beta_\rho+\gamma) = S + \frac{1}{2}\rho^2\mu^2\gamma^{-\frac{1}{2}}P_0\gamma^{-\frac{1}{2}}$$

$$T_\rho \equiv \frac{1}{2}(\gamma-\beta_\rho) = T - \frac{1}{2}\rho^2\mu^2\gamma^{-\frac{1}{2}}P_0\gamma^{-\frac{1}{2}}$$

これらの定義と, P_0L の次元数 $n < \infty$ から直ちに,

i) $\beta_\rho \geq \rho^2\mu^2/\|\gamma^{-\frac{1}{2}}\|^2$, ii) $T_\rho \in \mathbb{S}$ がいえる.

<u>Lemma 4.2.</u> $$H_\rho \equiv \frac{1}{2}(a a^*)\begin{pmatrix} T_\rho & S_\rho \\ S_\rho & T_\rho \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix}$$

$$= b^*\omega_\rho b + \text{const} = b_1^*\omega b_1 + \rho\mu b_0^* P_0 b_0 + \text{const}$$

但し, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_1^* \end{pmatrix}$ は (4.3) と同じ式で与えられる. また

$\mathcal{B}_\rho \equiv \begin{pmatrix} (\rho\mu)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & (\rho\mu)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_0^* \end{pmatrix} = U^{-1}\mathcal{B}_\rho^{-1}\mathcal{P}_0\mathcal{B}_1^{-1}U\begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix}$$

従つて，b_1，b_1^* と b_0，b_0^* の組は互に可換，即ち，$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_0$ と分解されて，$H_\rho = H_1 \otimes I_0 + I_1 \otimes H_{0\rho}$ となつている．

。$n < \infty$ のとき，$\binom{a}{a^*} \to \binom{b}{b^*}$ の変換は proper で $a = U_\rho b U_\rho^{-1}$ なる unitary operator U が存在する．そして，$a\Psi_0 = 0$ なるΨ_0 に対し，$\Phi_{0\rho} \equiv U_\rho^{-1}\Psi_0$ とおけば $b\Phi_{0\rho} = 0$ また $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_0$ において $\Phi_{0\rho} = \Phi_0^{(1)} \times \Phi_{0\rho}^{(0)}$，$b_1\Phi_0^{(1)} = 0$，$b_0\Phi_{0\rho}^{(0)} = 0$ なる $\Phi_0^{(1)}$，$\Phi_{0\rho}^{(0)}$ を夫々，$\mathfrak{F}_1$，$\mathfrak{F}_0$ から一意にとれる．このとき，$\mathfrak{F}_1$ と $\mathfrak{F}_0$ への分解，b_1，b_1^*，H_1 及び $\Phi_0^{(1)}$ はρによらない．

よつて次の定理をう．

<u>Theorem 4.1.</u> P_0 が有限次元のとき，Lemma 4.1 のHが $\mathfrak{F}$ で self-adjoint になるように定めて，H_1 は $\mathfrak{F}_1$ で self-adjoint で $H_1\Phi_0^{(1)} = 0$，H_0 は $\mathfrak{F}_0$ で self-adjoint で連続スペクトルをもつようにできる．

P_1L のなかで，ωの絶対連続スペクトル及びその他のスペクトルに属する空間を夫々，$P_{ac}L$ 及び P_sL で表わす．$\begin{pmatrix} b_{ac} \\ b_{ac}^* \end{pmatrix} = \mathcal{P}_{ac}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_1^* \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} b_s \\ b_s^* \end{pmatrix} = \mathcal{P}_s\begin{pmatrix} b_1 \\ b_1^* \end{pmatrix}$ で作られた Fock space を夫々 $\mathfrak{F}_{ac}$，$\mathfrak{F}_s$ とすれば

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{ac} \otimes \mathfrak{F}_s \otimes \mathfrak{F}_0$$

$$H = H_{ac} \otimes I_s \otimes I_0 + I_{ac} \otimes H_s \otimes I_0 + I_{ac} \otimes I_s \otimes H_0$$

但し，$H_{ac} = b_{ac}^* \omega b_{ac}$，$H_s = b_s^* \omega b_s$，$H_0$ は定理 4.1 に同じ

一方，Sの絶対連続スペクトルに属する空間への projection を $Q^{(1)}$，

また $Q^{(2)} = 1 - Q^{(1)}$ とし， $Q^{(1)}\begin{pmatrix} a \\ a* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1^* \end{pmatrix}$ ， $Q^{(2)}\begin{pmatrix} a \\ a* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_2^* \end{pmatrix}$
によつて作られた Fock space を $\mathfrak{F}^{(1)}$ ， $\mathfrak{F}^{(2)}$ とする.

$[\ \mathfrak{F} = \mathfrak{F}^{(1)} \otimes \mathfrak{F}^{(2)}]$

Theorem 4.2. 前定理の条件に $T \in \mathbf{T}$ をつけ加えると，次の unitary 変換 V が存在する：

$$D(V) = \mathfrak{F}^{(1)}, \quad R(V) = \mathfrak{F}_{ac}$$

$$Va_1V^* = b_{ac}, \quad Va_1^*V^* = b_{ac}^*$$

$$VH^{(1)}V^* = H_{ac} \qquad 但し \quad H^{(1)} = a_1^*Sa_1$$

§5 BCS 理論における reduced Hamiltonian のスペクトル

reduced Hamiltonian [4),5)] は

$$K(V) = K_0(V) + K_I(V)$$

但し $K_0(V) = \sum_{s\Bbbk} \varepsilon(\Bbbk) a_{s\Bbbk}^* a_{s\Bbbk}$， $K_I(V) = -\frac{1}{V} \sum_{\Bbbk,\Bbbk'} \Gamma(\Bbbk,\Bbbk') a_{1\Bbbk}^* a_{2-\Bbbk}^* a_{2-\Bbbk'} a_{1\Bbbk'}$.

$a_{s\Bbbk}$, $a_{s\Bbbk}^*$ はスピン s，運動量 $\Bbbk$ の電子の annilation; creation operator，電子の総数は N で体積 V の立方体内にあるとする. $\Gamma(\Bbbk, \Bbbk') = \Gamma(\Bbbk', \Bbbk)$ は real，且つ $k_1 \leq |\Bbbk|, |\Bbbk'| \leq k_2$ 以外で 0， $\varepsilon(\Bbbk) = \frac{1}{2}\Bbbk^2 - \mu$ は正負の値をとる. ここに μ は Fermi energy.

Bogoliubov 変換 [4),5)]

$$\alpha_{1\Bbbk} = a_{1\Bbbk}u_{\Bbbk} - a_{2-\Bbbk}^* v_{\Bbbk}, \quad \alpha_{2-\Bbbk} = a_{1\Bbbk}^* v_{\Bbbk} + a_{2-\Bbbk} u_{\Bbbk}, \quad (u_{\Bbbk}, v_{\Bbbk} \text{ real})$$

を行い， $u_{\Bbbk}$, $v_{\Bbbk}$ を適当に定める（詳細は略す）. K を $\alpha_{s\Bbbk}$, $\alpha_{s\Bbbk}^*$ で表わし， $\alpha_{1\Bbbk}^* \alpha_{2-\Bbbk}^*$ の形の Fermion pair の励起のみを考えた部分空間を

とり，$\alpha^*_{1\mathbb{k}}\,\alpha^*_{2\text{-}\mathbb{k}} \to B^*_{\mathbb{k}}$，$\alpha_{2\text{-}\mathbb{k}}\,\alpha_{1\mathbb{k}} \to \mathbb{B}_{\mathbb{k}}$ と Boson operator を導入して，$V \to \infty$（但し N/V-const ）にもつていく．そうすると，$B(\mathbb{k})$，$B^*(\mathbb{k})$ による Fock space で次の operator T_λ をうる[5)]

$$T_\lambda = T_0 + \lambda T_I \tag{5.1}$$

$$T_0 = 2\int B^*(\mathbb{k})E(\mathbb{k})B(\mathbb{k})d\mathbb{k}$$

$$T_I = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbb{k}d\mathbb{k}'\Gamma(\mathbb{k},\mathbb{k}'):\{-B^*(\mathbb{k})u^2(\mathbb{k})+B(\mathbb{k})v^2(\mathbb{k})\}$$
$$\times\{-B(\mathbb{k}')u^2(\mathbb{k}')+B^*(\mathbb{k}')v^2(\mathbb{k}')\}:$$

ただし $\left.\begin{matrix} u^2(\mathbb{k}) \\ v^2(\mathbb{k}) \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}[1\pm\frac{\varepsilon(\mathbb{k})}{E(\mathbb{k})}]$，$E(\mathbb{k}) = \begin{cases} -\varepsilon(\mathbb{k}), & |\mathbb{k}| < k_1 \\ \sqrt{\varepsilon^2(\mathbb{k})+C^2(\mathbb{k})}, & k_1 \le |\mathbb{k}| \le k_2 \\ \varepsilon(\mathbb{k}), & |\mathbb{k}| > k_2 \end{cases}$

$C(\mathbb{k})$ は $C(\mathbb{k}) = \dfrac{1}{2(2\pi)^3}\displaystyle\int\frac{\Gamma(\mathbb{k},\mathbb{k}')C(\mathbb{k}')}{\sqrt{\varepsilon^2(\mathbb{k}')+C^2(\mathbb{k}')}}d\mathbb{k}'$ の解 (5.2)

また λ は便宜上導入したパラメーターで実際には $\lambda = 1$ が問題．以下，$\mathbb{k}$ の範囲を $k_1 \le |\mathbb{k}| \le k_2$ とする．

operator (5.1) を前節迄の議論にのせると，次のような S, T, β, γ を考えることになる．

$$S = 2E(\mathbb{k}) - \frac{\lambda}{(2\pi)^3}\Gamma(\mathbb{k},\mathbb{k}')\{u^2(\mathbb{k})u^2(\mathbb{k}')+v^2(\mathbb{k})v^2(\mathbb{k}')\}$$

$$T = \frac{\lambda}{(2\pi)^3}\Gamma(\mathbb{k},\mathbb{k}')\{u^2(\mathbb{k})v^2(\mathbb{k}')+v^2(\mathbb{k})u^2(\mathbb{k}')\} \tag{5.3}$$

$$\beta = 2E(\mathbb{k}) - \frac{\lambda}{(2\pi)^3}\Gamma(\mathbb{k},\mathbb{k}')\frac{\varepsilon(\mathbb{k})}{E(\mathbb{k})}\;\frac{\varepsilon(\mathbb{k}')}{E(\mathbb{k}')}$$

$$\gamma = 2E(\mathbb{k}) - \frac{\lambda}{(2\pi)^3}\Gamma(\mathbb{k},\mathbb{k}')$$

仮定 5.1 :　(5.2) の解 $C(\mathbb{k})$ の存在を仮定する.

° $\Gamma(\mathbb{k},\mathbb{k}') = \gamma(\mathbb{k})\gamma(\mathbb{k}')$ のときには証明容易

° 一般の場合については文献 7) で論じられている.

仮定 5.2 :　$\Gamma(\mathbb{k},\mathbb{k}') \in \mathbf{S}$　$(\Longrightarrow T \in \mathbf{S})$

<u>Lemma 5.1</u>　β, γ のスペクトルに関して, ($\lambda = 1$, スペクトルのパラメーターをSとす).

i)　$S < 2E_0$,　ただし $E_0 = \min_{\mathbb{k}} E(\mathbb{k})$, に β , γ の連続スペクトル, 及び点スペクトルの集積点はない.

ii)　$S < 2E_0$ に β, γ の有限多重度の点スペクトルがある. 特に β は $S = 0$ に点スペクトルをもつ.

(証明)　$\beta\varphi = 2\ell\varphi$ を $\ell < E_0$ でとく. $\psi \equiv \sqrt{E-\ell}\,\varphi$ とおくと, 固有値方程式は $\psi = \lambda K(\ell)\psi$ となる. 但し $K(\ell) = \dfrac{\Gamma(\mathbb{k},\mathbb{k}')}{\sqrt{E(\mathbb{k})-\ell}\ \sqrt{E(\mathbb{k}')-\ell}} \in \mathbf{S}$.

ℓ を固定したとき, Kの固有値 $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \cdots (\to \pm\infty)$ はすべて有限多重度をもつ. λ を固定したときの β の固有値を $\ell_1, \ell_2, \cdots$ とすると, $(\beta - 2\ell)^{-1}$ は $\{\ell;\ \ell < E_0,\ \ell \neq (\ell_i$ 及びその集積点$)\}$ で有界, 即ち, そこで resolvent がある. これから, i) の前半が出る. ℓ_i は λ の単調減少関数で E_0 から現われる. $\ell < E_0$ で ℓ_i が無限個あれば, ℓ を固定したとき, λ の有限範囲に λ_j が無限個あることになり矛盾, 故に, i) の後半と ii) の前半がいえる. γ についても同様. また β が $S = 0$ に点スペクトルをもつことは, (5.2) より $\psi = \dfrac{C}{E} = \dfrac{C}{\sqrt{\varepsilon^2 + C^2}} \in L^2$ とおけば, $E(\mathbb{k})\psi(\mathbb{k}) = \dfrac{1}{2(2\pi)^3}\displaystyle\int \Gamma(\mathbb{k},\mathbb{k}')\psi(\mathbb{k}')d\mathbb{k}'$ となることからわかる.

仮定 5.3 :　$\lambda = 1$ のとき, β のスペクトルの下端を β_m とおき,

$\beta_m = 0$ とする．

。 $\Gamma(k,k') = \gamma(k)\gamma(k')$ ならば，この仮定は成立つていることが示せる．

Lemma 5.2. $\gamma > \beta_m$，とくに $\beta_m = 0$ ならば γ のスペクトルの下端は正，

。 (5.3) を用いて，Lemma 5.1 からいえる．

Theorem 5.1. 仮定 5.1〜3 のもとで T_λ（ただし $\lambda = 1$）に Theorem 4.1 が適用できる．

仮定 5.2'： 仮定 5.2 を強めて，$\Gamma \in \mathbb{T}$ 即ち $T \in \mathbb{T}$ とする．

Theorem 5.2. 仮定 5.1, 5.2', 5.3 のもとで $T_\lambda(\lambda = 1)$ に Theorem 4.2 が適用できる．

この節のまとめ 仮定 5.1, 5.3 が実際に成立つている Γ の範囲はまだ確定されていないが，少くとも $\Gamma(k,k') = \gamma(k)\gamma(k')$ の場合には Theorem 4.2 が適用される．このとき

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{ac} \otimes \mathfrak{H}_s \otimes \mathfrak{H}_0$$

$$T_\lambda(\lambda\text{-}1) = T_{ac} \otimes I_s \otimes I_0 + I_{ac} \otimes T_s \otimes I_0 + I_{ac} \otimes I_s \otimes T_p$$

となり，T_s 以外は定まる．$T_\lambda(\lambda=1)$ は下に有界で，従つて系は安定である．また $\mathfrak{H}_{ac}$ での T_{ac} は $\mathfrak{H}$ における $T_0 = 2\int B^*(k)E(k)B(k)dk$ とウニタリ同値で，energy gap $2E_0$ を与える．$\mathfrak{H}_0$ での T_p は Theorem 4.2 の H_0 と同様，連続スペクトルをもつ．これらの結論は文献 6) 8)（$k_1 \leq |k| \leq k_2$ で $\gamma(k) = \text{const}$ の場合）のそれを包含している．

今後の問題点

。 スピン，アイソ・スピン等の所謂 accessary variables の自由度を導入する可能性。

。 文献 8) で用いた asymptotic operator による方法，その他との関連，並びにそれらを併用してスペクトルをしらべる．etc．

Appendix ACR の場合

ACR $\{a,a^*\} = 1,\quad \{a,a\} = \{a^*,a^*\} = 0$

を不変にする斉一次変換 $\begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix} = \mathcal{A}\begin{pmatrix} b \\ b^* \end{pmatrix}$ ただし $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{pmatrix}$ のつくる群を考える．$\mathcal{A}$ の満たすべき条件は

$$\mathcal{A} I \mathcal{A}' = I \quad \text{及び} \quad \mathcal{A}' I \mathcal{A} = I \qquad \text{但し}\ I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Phi = (\Phi\Phi^*)^{\frac{1}{2}} U$ ， U はウニタリ，と書ける． (A.1)

(CCR のとき，後の条件は前のものから出る)． CCR のときと同様．

$\mathcal{A}$ proper $\rightleftharpoons \Psi \in \mathfrak{S}$, よつて同じ式で G, G_0 が定義される．

$\mathcal{A}$ の real correspondence は次のとおり：

$$\mathcal{B} = U\mathcal{A}U^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad \text{但し}\ U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

$$A = \mathrm{Re}(\Phi+\Psi)\ , \qquad B = \mathrm{Im}(\Phi-\Psi)$$

$$C = -\mathrm{Im}(\Phi+\Psi)\ , \qquad D = \mathrm{Re}(\Phi-\Psi)$$

$$\mathcal{B}\mathcal{B}' = 1 \quad \text{及び} \quad \mathcal{B}\mathcal{B}' = 1 \qquad (A.2)$$

$$\mathcal{A} \in G \rightleftharpoons \mathcal{B} \in F = \{\mathcal{B}\ ;\ A-D,\ B+C \in \mathfrak{S}\}$$

$$\mathcal{A} \in G_0 \rightleftharpoons \mathcal{B} \in F_0 = \{\mathcal{B}\ ;\ A = D,\ B = -C\}$$

(A.1), (A.2) を (2.1), (2.2) とくらべてわかるように，CCR では symplectic group を考えたのに対し，ACR では orthogonal group を考えることになる。

<u>Theorem</u>

$$H = \frac{1}{2}(aa^*)\begin{pmatrix} -\overline{T} & -\overline{S} \\ S & T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix}$$

は normal form ($T \in \mathfrak{S}$) かつ self-adjoint ($T' = -T$, $S^* = S$) であるとする.

i) $\overline{T} = T$, $\overline{S} = S$.　　　ii) $[S,T] \in \mathfrak{S}$

iii) $S \geq \mu > 0$, $(S \pm T)(S \mp T) \geq \mu > 0$ (μ は positive const)

$\Rightarrow$ $^\exists \mathcal{A} \in G$, $\begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix} = \mathcal{A}\begin{pmatrix} b \\ b^* \end{pmatrix}$ のとき

$$H = b^*\Omega b + k$$

となる. ここに $\Omega^* = \Omega$, k は const.

この Berezin の定理の証明を, §3 で与えた我々の流儀で述べる. 問題の $\mathcal{A} \in G$ を $\mathcal{A} = U^{-1}\mathcal{B}U$ と書いて, $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}$, A,D real, を仮定して, 対角化の条件と $\mathcal{B} \in F$ から A, D をきめる.

$$\begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix} = U^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{B}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

によつて

$$H = \frac{1}{2}(xy)\begin{pmatrix} 0 & -i\beta \\ i\gamma & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(uv)\begin{pmatrix} 0 & -iA'^{-1}\beta D^{-1} \\ iD'^{-1}\gamma A^{-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

となる. ここに, $\gamma = S+T, \beta = S-T = \gamma'$ (定理の条件から) である.

$A'^{-1}\gamma' D^{-1} = D'^{-1}\gamma A^{-1}$ ($\equiv \Omega = \Omega'$) となるように A,D を選ぶ (対角化の条件) と, $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = U\begin{pmatrix} b \\ b^* \end{pmatrix}$ 　によつて

$$H = \frac{1}{2}(bb^*)\begin{pmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ b^* \end{pmatrix} = b^*\Omega b - \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\Omega$$

となる. 一方, $\mathcal{B} \in F$ から

$$AA' = DD' = A'A = D'D = 1 \text{ かつ } A^{-1}-D^{-1} \in \mathfrak{S} \qquad (A.3)$$

また，対角化の条件は， $Y = A^{-1}D$ として $\gamma Y = Y'\gamma'$ をとけば，

$Y = \gamma^{-1}(\gamma\gamma')^{\frac{1}{2}}$ をえて，

$$A^{-1}D = \gamma^{-1}(\gamma\gamma')^{\frac{1}{2}} \qquad (A.4)$$

となる．(A.3)(A.4) の2組の解：

a) $A = Y^{-\frac{1}{2}}$, $D = Y^{\frac{1}{2}}$ $\therefore \Omega = Y^{\frac{1}{2}}\gamma Y^{\frac{1}{2}}$ (Berezinの解)

b) $A^{-1} = \gamma^{-1}\omega$, $D = 1$, 但し $\omega = (\gamma\gamma')^{\frac{1}{2}}$, $\therefore \Omega = \omega$

。Y は normal operator

。Berezin によつて $Y-1 \in \mathfrak{S}$ が直接確かめられているから $\mathcal{A} \in G$

。a) と b) は互に G_0 の変換によつて移る．

。b) については，CCR のときの$\mathcal{B}$の分解に当るものはない．

文　献

[1] 前出

[2] K.O.Friedrichs: Mathematical aspects of the quantum theory of fields, Interscience Publisher, New York, 1953, Part V.

[3] K.O.Friedrichs: Perturbation of spectra in Hilbert space, Amer. Math. Soc., Providence, 1965, Chapter III

[4] J.Bardeen, L.N.Cooper and N.Schrieffer: Theory of superconductivity, Phys. Rev. 108 (1957), 1175-1204
N.N.Bogoliubov, A new method of superconductivity theory I, ЖЭТФ 34 (1958), 58-65 (Russian)[English transl. Soviet Physics JETP 34 (1958), 41]

[5] N.N.Bogoliubov, V.V.Tolmachev and D.V.Shirkov: A new method in the theory of superconductivity, Akad. Nauk SSSR, Moscow, 1958 (Russian)[English transl. Consultants Bureau, New York, 1959)

[6] Y.Kato: Spectrum of the BCS Hamiltonian in the theory of superconductivity, Prog. Theor. Phys. 34 (1965), 734-753

[7] M.Kitamura: Non-linear integral equations of the Hammerstein type, Prog. Theor. Phys. 30 (1963), 435-442

[8] Y.Kato and N.Mugibayashi: Regular perturbation and asymptotic limits of operators in quantum field theory, Prog. Theor. Phys. 30 (1963), 103-133
N.Mugibayashi and Y.Kato: Regular perturbation and asymptotic limits of operators in fixed-source theory, Prog. Theor. Phys. 31 (1964), 300-310